

# 1方程式SGSモデルを用いた格子ボルツマン法による 乱流シミュレーション

著者	元吉 汰一
出版者	法政大学大学院理工学研究科
雑誌名	法政大学大学院紀要．理工学・工学研究科編
巻	60
ページ	1-8
発行年	2019-03-31
URL	<a href="http://doi.org/10.15002/00022081">http://doi.org/10.15002/00022081</a>

# 1 方程式 SGS モデルを用いた格子ボルツマン法による乱流シミュレーション

## Turbulent flow simulation by Lattice Boltzmann method using one-equation SGS model

元吉汰一

Taichi Motoyoshi

指導教員 堀端康善

### 概要

In this paper, we propose a method of turbulent flow simulation by D3Q27 Multiple-relaxation-time Lattice Boltzmann method using one-equation SGS model. We apply this method to backstep flow and compare the result with one obtained using the Smagorinsky model.

Key words: LBM, MRT, LES, one-equation model, Smagorinsky model

### 1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と記す) は, 比較的新しい数値計算法であり, Navier-Stokes 方程式を解く代わりに離散的なボルツマン方程式を解き, ニュートン流体の流れをシミュレートする手法である. 乱流の数値シミュレーションに用いられる数値解析手法には, 有限差分法などが従来用いられてきたが, 近年, 格子生成の必要が無く, 複雑流路表現能力が高く, プログラムが簡単で並列計算に適し, かつ圧力のポワソン方程式を解かなくてもよいというメリットのある LBM が脚光を浴びている. しかし, LBM による乱流解析は歴史が浅いこともあり, ほとんどがスマゴリンスキーモデル型のラージ・エディ・シミュレーション (Large eddy simulation, 以下 LES と記す) [1, 2, 3] を用いたシミュレーションである. しかしスマゴリンスキーモデルでは適用する流れ場によってモデル係数が異なる等の欠点もいくつか指摘されている. 一方, 代表変数として SGS 運動エネルギー  $k$  を導入し, GS 方程式と合わせてその輸送方程式を解く 1 方程式 SGS (Sub-grid scale) モデル型 LES も従来の Navier-Stokes 方程式の乱流解析においてはいくつか提案されているが [4], LBM に適用した事例は存在しない.

そこで本論文では 1 方程式 SGS モデルの LES に着目し, 3 次元 27 速度での LBM に適用させ, バックス

テップ乱流で検証シミュレーションを行い, スマゴリンスキーモデルを用いた LBM との比較, 検討を行い, 1 方程式 SGS モデル型の LES を使用した LBM の乱流解析での可能性を考察することを目的とする.

また, 一般的な LBGK モデルによる解は, 有限のクヌーセンまたは高レイノルズ数の複雑な流れで不安定になることが多い. これらの問題を克服するために, 多緩和時間モデル (Multiple-relaxation-time, MRT) が解を安定化させ, 満足のいく結果を得ることに有用である [5]. したがって本論文では MRT モデルも取り入れ, D3Q27MRT-LBM としてシミュレーションを行う.

なお, 本論文の変数は全て, 代表長さ  $L$ , 代表粒子速さ  $c$ , 代表時間  $t_0 = L/U$  ( $U$ : 代表流れ速さ), 基準密度  $\rho_0$  を用いて無次元した無次元変数である. 定義を以下に示す.

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i/c, & \hat{x} &= x/L, & \hat{t} &= t/t_0 \\ \hat{f}_i &= f_i/\rho_0, & \hat{\rho} &= \rho/\rho_0, & \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}/c \\ \hat{p} &= p/(\rho_0 c^2), & \hat{\nu} &= \nu/(cL) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\hat{\cdot}$  の付いたものが無次元変数である. ただし以降は  $\hat{\cdot}$  を省略している.

### 2. LBM の概要

#### (1) 格子速度モデル

格子速度モデルとしてはいくつか提案されているが, 本論文では 3 次元 27 速度 (D3Q27) モデルを用いる. 理由としては, 乱流解析においてはこのモデルが

ふさわしいといった研究結果が存在しているためである [6]。以下の図 1 と表 1 に D3Q27 モデルでの 27 つの速度ベクトルをまとめた。

ここで、 $\mathbf{c}_i$  : 仮想粒子の速度ベクトル、 $w_i$  : ウェイトパラメータである。

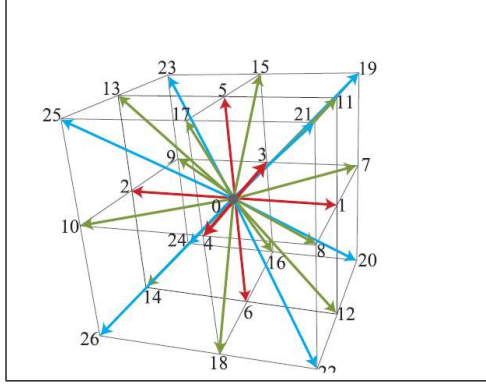


図 1: virtual particle velocity vector distribution of D3Q27 model

表 1: Velocity vector  $\mathbf{c}_i$  and weight factor  $w_i$

$i$	$\mathbf{c}_i = (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})$	$ \mathbf{c}_i $	$w_i$
0	(0, 0, 0)	0	8/27
1, ..., 6	( $\pm 1, 0, 0$ ), ( $0, \pm 1, 0$ ), ( $0, 0, \pm 1$ )	1	2/27
7, ..., 18	( $\pm 1, \pm 1, 0$ ), ( $\pm 1, 0, \pm 1$ ), ( $0, \pm 1, \pm 1$ )	$\sqrt{2}$	1/54
19, ..., 26	( $\pm 1, \pm 1, \pm 1$ )	$\sqrt{3}$	1/216

## (2) 基礎方程式 (SRT)

単緩和時間 (SRT) モデルでの LBM の基礎方程式を導出する。まず、座標  $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  および時刻  $t$  における速度  $\mathbf{c}_i$  をもつ仮想粒子の速度分布関数  $f_i(\mathbf{r}, t)$  は、次の離散ボルツマン方程式 (discrete Boltzmann equation) に従う [7]。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = \Omega_i[f(\mathbf{r}, t)] \quad (2)$$

for  $i = 0, 1, \dots, 26$

ここで、 $\Omega[\cdot]$  は仮想粒子の衝突による速度分布関数  $f_i$  の増減を表す衝突演算子である。上式の左辺は仮想粒子の自由運動を、右辺は仮想粒子の衝突を表している。次に、計算領域を 1 辺  $\Delta x$  の立方格子で分割し、簡略化のために仮想粒子の代表速度を  $c = 1$  としているため、時間刻み  $\Delta t$  (仮想粒子が隣の格子点まで移動する時間) は  $\Delta t = \Delta x$  である。式 (2) の左辺を 1 次差分で近似して整理すると、次式が得られる。

$$\underbrace{f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t)}_{\text{Streaming}} = \underbrace{\Omega_i[f_i(\mathbf{r}, t)]}_{\text{Collision}} \quad (3)$$

$$\text{for } i = 0, 1, \dots, 26$$

式 (3) は格子ボルツマン方程式 (lattice Boltzmann equation) と呼ばれ LBM の基礎式である。左辺は仮想粒子の並進運動、右辺は仮想粒子の衝突運動を表している。この右辺の衝突項の取り扱いとしては、高レイノルズ数の計算を可能にするといった観点から、近年ほとんどの LBM では Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) モデルが用いられている。衝突項に BGK モデルを適用させると、

$$\Omega_i[f_i(\mathbf{r}, t)] = -\frac{1}{\tau} \{f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)\} \quad (4)$$

$$f_i^{eq} : \text{局所平衡分布関数} \quad \tau : \text{緩和時間係数}$$

となるため、BGK モデルを適用させた式 (3) の LBM の基礎式は、

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau} \{f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)\} \quad (5)$$

となる。D3Q27 モデルでは局所平衡分布関数は表 1 の速度ベクトル  $\mathbf{c}_i$  と重み係数  $w_i$ 、格子点上での巨視的な流体密度  $\rho$ 、流速  $\mathbf{u}$  を用いて、

$$f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) = \rho w_i \{1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{u}|^2\} \quad (6)$$

で求められる。式 (6) の右辺は、一般の気体分子運動論の局所平衡解である Maxwell 分布において、流速  $\mathbf{u}$  が  $c$  に比べて十分小さいものとして  $\mathbf{u}^2$  まで展開したものである。重み係数  $w_i$  は、式 (7)(8) 並びに Navier-Stokes 方程式の応力テンソルが成り立つように定められている。

LBM では式 (5) の基礎方程式を用いて衝突・並進を時間発展させていき流体の動きをシミュレートしていく。格子点上での巨視的な流体密度  $\rho$ 、流速  $\mathbf{u}$  は、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{26} f_i(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{26} f_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}_i \quad (8)$$

で求めることができ、タイムステップ毎に随時更新していく。また、LBM では以下の関係が成り立つ。

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \Delta x \quad (10)$$

$$\left( \tau = \frac{3}{\Delta x} \nu + \frac{1}{2} \right) \quad (11)$$

$$p : \text{圧力} \quad \nu : \text{動粘性係数}$$

## 3. MRT-LBM の理論

最も一般的な LBM は、前章での単一緩和時間近似に基づくモデルで、BGK 形式で記述され、格子 BGK

モデルと呼ばれる。このモデルは非常に単純であり、現在広く適用されている計算手法である。しかし、LBGK モデルによる解は、有限のクヌーセンまたは高レイノルズ数の複雑な流れで不安定になることが多い[5]。これらの問題を克服するために、d’Humières らによって確立された [8] 多緩和時間モデル (multiple-relaxation-time, MRT) が解を安定化させ、満足のいく結果を得ることに有用である。何故なら、MRT モデルでは、Lallemand と Luo[9] が議論したように、物理モーメントごとに独立して最適化された緩和時間を使用することができるからである。

ここでは (1) での D3Q27 格子 BGK モデルでの SRT-LBM を、MRT に拡張した MRT-LBM について記述する。なお、拡張されるのは衝突過程のみであり、並進過程と境界条件については SRT と同様のものとなる。

### (1) 基礎方程式 (MRT)

MRT-LBM では、変換行列  $M$  によって速度空間の分布関数をモーメント空間に変換する。分布関数のモーメントは流量に直接対応するので、モーメントの表現は、様々な物理的プロセスの異なる時間スケールに従って異なる緩和時間で緩和プロセスを実行することを可能にする。したがって、SRT で式 (5) であった時間発展方程式は、MRT においては以下で書かれる。

$$|f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t)\rangle - |f(\mathbf{x}, t)\rangle = -M^{-1} \hat{S} [|m(\mathbf{x}, t)\rangle - |m^{eq}(\mathbf{x}, t)\rangle] \quad (12)$$

ここで、 $\hat{S}$  は衝突行列、 $m_i$  はモーメントを表し、

$$|m\rangle = M \cdot |f\rangle \quad (13)$$

によって変換行列  $M$  によって分布関数  $f_i$  をモーメントに変換したものである。 $|f\rangle$  は Dirac のベクトル記法のケットベクトル (ket) で、列ベクトル

$$|f(\mathbf{x}, t)\rangle = (f_0(\mathbf{x}, t), f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_{26}(\mathbf{x}, t))^T \quad (14)$$

を表す。衝突行列  $\hat{S}$  は対角行列  $\hat{S} = \text{diag}(s_0, s_1, \dots, s_{26})$  で、 $\hat{S} = \omega \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$ : 恒等行列,  $\omega = 1/\tau$ ,  $\tau (> 1/2)$ ,  $\tau$ : 緩和時間) とすると、式 (3) が SRT での格子 BGK 方程式に還元される。

### (2) 変換行列の導出

#### b) モーメント

行列  $M$  は、式 (13) によって分布関数  $f_i$  をモーメント  $m_i$  に線形変換する  $27 \times 27$  の行列である。モーメントは流体密度  $\rho$ 、運動量  $j$ 、運動エネルギー  $e$  などであり、例えば D3Q27 モデルでは、[10] に従って、流

量は分布関数を使用して定義される。流体密度については

$$\tilde{m}_0 = \rho \equiv \sum_{i=0}^{26} f_i \quad (15)$$

運動量は

$$\begin{cases} \tilde{m}_1 = j_x \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{ix} f_i \\ \tilde{m}_2 = j_y \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iy} f_i \\ \tilde{m}_3 = j_z \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iz} f_i \end{cases} \quad (16)$$

運動エネルギーは

$$\tilde{m}_4 = e \equiv \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \quad (17)$$

2 次テンソルは

$$\begin{cases} \tilde{m}_5 = XX \equiv \sum_{i=0}^{26} (2c_{ix}^2 - c_{iy}^2 - c_{iz}^2) f_i \\ \tilde{m}_6 = WW \equiv \sum_{i=0}^{26} (c_{iy}^2 - c_{iz}^2) f_i \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tilde{m}_7 = XY \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{ix} c_{iy} f_i \\ \tilde{m}_8 = YZ \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iy} c_{iz} f_i \\ \tilde{m}_9 = ZX \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iz} c_{ix} f_i \end{cases} \quad (19)$$

エネルギー流束およびその 2 乗は

$$\begin{cases} \tilde{m}_{10} = \varphi_x \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) c_{ix} f_i \\ \tilde{m}_{11} = \varphi_y \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) c_{iy} f_i \\ \tilde{m}_{12} = \varphi_z \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) c_{iz} f_i \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \tilde{m}_{13} = \psi_x \equiv \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2)^2 c_{ix} f_i \\ \tilde{m}_{14} = \psi_y \equiv \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2)^2 c_{iy} f_i \\ \tilde{m}_{15} = \psi_z \equiv \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2)^2 c_{iz} f_i \end{cases} \quad (21)$$

エネルギーの 2 乗と 3 乗は

$$\tilde{m}_{16} = \varepsilon \equiv \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2)^2 f_i \quad (22)$$

$$\tilde{m}_{17} = e_3 \equiv \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{26} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2)^3 f_i \quad (23)$$

二次テンソルとエネルギーとの積は

$$\begin{cases} \tilde{m}_{18} = XX_e \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} (2c_{ix}^2 - c_{iy}^2 - c_{iz}^2)(c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \\ \tilde{m}_{19} = WW_e \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} (c_{iy}^2 - c_{iz}^2)(c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \tilde{m}_{20} = XY_e \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} c_{ix} c_{iy} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \\ \tilde{m}_{21} = YZ_e \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} c_{iy} c_{iz} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \\ \tilde{m}_{22} = ZX_e \equiv 3 \sum_{i=0}^{26} c_{iz} c_{ix} (c_{ix}^2 + c_{iy}^2 + c_{iz}^2) f_i \end{cases} \quad (25)$$

3 次の擬ベクトルと全反対称テンソル XYZ は

$$\begin{cases} \tilde{m}_{23} = \tau_e \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{ix} (c_{iy}^2 - c_{iz}^2) f_i \\ \tilde{m}_{24} = \tau_e \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iy} (c_{iz}^2 - c_{ix}^2) f_i \\ \tilde{m}_{25} = \tau_e \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{iz} (c_{ix}^2 - c_{iy}^2) f_i \end{cases} \quad (26)$$

$$\tilde{m}_{26} = XYZ \equiv \sum_{i=0}^{26} c_{ix} c_{iy} c_{iz} f_i \quad (27)$$

ここで  $c_{ix}$ ,  $c_{iy}$ ,  $c_{iz}$  はそれぞれ  $c_i$  の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向成分である。モーメントを  $|\tilde{\mathbf{m}}\rangle = \tilde{\mathbf{M}} \cdot |\mathbf{f}\rangle$  と書くと、行列  $\tilde{\mathbf{M}}$  が求まる。

#### b) 直行化

標準のグラムシュミット法により、 $\tilde{\mathbf{M}}$  を直交化することができ、変換行列  $\mathbf{M}$  を導出することができる。 $\tilde{\mathbf{M}}_l$  と  $\mathbf{M}_l$  がそれぞれ  $\tilde{\mathbf{M}}$  と  $\mathbf{M}$  の  $l$  番目の行ベクトルを表すとき、 $\mathbf{M}_k$  は

$$\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{M}}_k - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\tilde{\mathbf{M}}_k \cdot \mathbf{M}_l}{|\mathbf{M}_l|^2} \mathbf{M}_l \quad (k \geq 4) \quad (28)$$

と書くことができる。 $\tilde{\mathbf{M}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_3$  に対応するモーメントはそれぞれ  $\rho$ ,  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  であり、それらは互いに独立しているので、直交化手順は第4行から実施される。次に式(28)に代入すると、変換行列  $\mathbf{M}$  が求まる。逆行列は  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{I}_M^{-1}$  で、ここで  $\mathbf{I}_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T$  である。

#### b) 平衡モーメント

平衡モーメント  $m_i^{eq}$  は通常  $|\mathbf{m}^{eq}\rangle = \mathbf{M} \cdot |\mathbf{f}^{eq}\rangle$  として得られる。また、平衡モーメントは  $\rho$  と  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  の式としても表すことができる。

#### (3) 緩和行列

モーメント  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  は保存される。すなわち、 $m_i = m_i^{eq}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) であるから、衝突を考慮する必要がない。したがってそれに対応する  $S_i$  の成分を0にすると、 $27 \times 27$  の対角行列である衝突行列  $\hat{\mathbf{S}}$  は以下のように書くことができる。

$$\hat{\mathbf{S}} \equiv \text{diag}(0, 0, 0, 0, s_4, s_5, s_5, s_7, s_7, s_7, s_{10}, s_{10}, s_{10}, s_{13}, s_{13}, s_{13}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{18}, s_{20}, s_{20}, s_{20}, s_{23}, s_{23}, s_{23}, s_{26}) \quad (29)$$

粘性と  $S_i$  の対応する成分との間の関係は、動粘度  $\nu$  に対するものであり、

$$\nu = \left(\frac{1}{s_5} - \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta x}{3} = \left(\frac{1}{s_7} - \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta x}{3} \quad (30)$$

バルク粘度  $\zeta$  については、

$$\zeta = \left(\frac{1}{s_4} - \frac{1}{2}\right) \frac{2\Delta t}{9} \quad (31)$$

ここで、 $s_4$ ,  $s_5$  および  $s_7$  は、運動エネルギーおよび二次テンソルの緩和係数である。緩和係数は、安定性のために  $0 < s_i < 2$  を満たす必要がある。残りの緩和因子は、LBM を Navier-Stokes 方程式に還元するとき、高次項に影響を与えるが、輸送係数に影響を与

えずに調整することができる [11]。したがって、数値的安定性を得るために d'Humieres ら [8] は、線形解析による妥協の結果として、準最適緩和因子を得た。D3Q27 モデルでは、須賀ら [5] が準最適緩和因子セットを示しており、本論文ではそれを参考に以下のセットを用いた。

$$\begin{aligned} s_4 &= 1.54 & s_{10} &= 1.5 & s_{13} &= 1.83 \\ s_{16} &= 1.4 & s_{17} &= 1.61 & & \\ s_{18} = s_{20} &= 1.98 & s_{23} = s_{26} &= 1.74 & & \end{aligned} \quad (32)$$

これらの値は準最適なものであり、他の値のセットも可能であることに注意したい。非圧縮性流体の場合、バルク粘度は重要ではなく、それに関連する因子は一定に設定する。

## 4. LES を適用した LBM

レイノルズ数が大きくなると、流れは層流から乱流に遷移し、複雑な挙動をする。乱流の複雑な挙動を直接的にシミュレーションするのは、多大な計算格子を用意する必要があり、現実的ではない。LBM においてもその限りである。したがって乱流モデルを導入する必要がある。乱流モデルとしては多くのモデルが提案されているが、現在はラージ・エディ・シミュレーション (Large eddy simulation, LES) が主流となっていて、LBM における乱流解析においても、LES を適用した LBM を計算した事例が多くを占めている。LES にも多くのモデルが存在し、LBM においてはほとんどがスマゴリンスキーモデル型の LES が使われている [1, 2, 3]。本論文では、1 方程式 SGS モデルの LES に着目して LBM に適用させた。そこで、ここではスマゴリンスキー型 LES、1 方程式 SGS モデルの LES それぞれについて概説し、それらを LBM に取り入れる手法を記述する。

### (1) LES

ラージ・エディ・シミュレーション (Large eddy simulation, LES) は、流れの基礎方程式に空間的な平均操作を行い、流れ場を格子で解像できる成分 (グリッドスケール, GS) と、それ以下の小さい成分 (サブグリッドスケール, SGS) に分離し、前者は直接的に計算し、後者は何らかのモデル化を行う乱流解析手法である。

### (2) LES を適用した LBM

LES を適用した LBM の計算手法について、SRT, MRT それぞれについて記述する。LES では動粘性を分子粘性と渦粘性 (格子粘性) で考える。総動粘性を  $\nu_w$ , 分子粘性を  $\nu_0$ , 渦粘性を  $\nu_t$  とすると、総粘性  $\nu_w$

は

$$\nu_w(\mathbf{r}, t) = \nu_0 + \nu_t(\mathbf{r}, t) \quad (33)$$

となる.

(2) で述べた通り, SRT-LBM では粘性を

$$\tau = \frac{3}{\Delta x} \nu + \frac{1}{2} \quad (34)$$

で緩和時間に変換し, 式 (5) の衝突項の計算で用いる. LES を適用した総緩和時間  $\tau_w$  も式 (34) の一般の緩和時間と同じように

$$\tau_w(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{\Delta x} \nu_w(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \quad (35)$$

で求められ, 式 (5) の衝突項に用いることによって SRT-LBM での乱流モデルへの拡張となる.

MRT-LBM でも同じように, (1),(3) で述べた通り粘性は,

$$\frac{1}{s_5} = \frac{1}{s_7} = \frac{3}{\Delta x} \nu + \frac{1}{2} \quad (36)$$

で緩和行列  $\hat{S}$  の成分に変換され, 式 (12) の衝突項の計算で用いる. つまり SRT での緩和時間を用いると以下の関係が成り立つ.

$$\frac{1}{s_5} = \frac{1}{s_7} = \tau \quad (37)$$

LES を適用する際は, 粘性と対応する成分  $S_i$  は式 (35) の総緩和時間を用いて,

$$\frac{1}{s_5(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{s_7(\mathbf{r}, t)} = \tau_w(\mathbf{r}, t) \quad (38)$$

となる. これを式 (12) の衝突項の  $\hat{S}$  の成分に用いることによって MRT-LBM での乱流モデルへの拡張となる.

#### b) スマゴリンスキーモデル

SGS のモデル化の代表的な手法であるスマゴリンスキーモデルを LBM に適用する [12].

スマゴリンスキーモデルでの渦粘性は

$$\nu_t = (C_s \Delta_L)^2 |S| \quad (39)$$

で求められる. このとき  $C_s$  はスマゴリンスキー定数で 0.1~0.2 の値が通常用いられる.  $\Delta_L$  はフィルター幅である.  $|S|$  は歪速度テンソル  $S$  の絶対値であり,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (40)$$

$$|S| = \sqrt{2 \sum_{i,j} S_{ij} S_{ij}} \quad (41)$$

である. 歪速度テンソルは LBM においては密度分布関数から求められ,

$$S_{jk} = -\frac{3}{2\rho_0 \tau_w \Delta x} Q_{jk} \quad (42)$$

$$Q_{jk} = \sum_i c_{ij} c_{ik} \{f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)\} \quad (43)$$

である. 以上のことから (33), (35), (39), (42), (43) から  $|S|$  について解くと

$$|S| = \frac{1}{6(C_s \Delta x)^2} \{ \sqrt{\tau_0^2 \Delta x^2 + 18 \Delta x^2 C_s^2 |Q|} - \tau_0 \Delta x \} \quad (44)$$

となる.

#### b) 1 方程式 SGS モデル

1 方程式 SGS モデルでは渦粘性に SGS 運動エネルギーを取り入れることによってより精度の高いモデル化を目指す. また, この節では 1. で示した無次元変数を扱うのではなく, 有次元変数を用いる.

1 方程式 SGS モデルでの渦粘性は

$$\nu_t = C_k \Delta_L \sqrt{k} \quad (45)$$

で求められる. このとき  $C_k$  はパラメータ定数で 0.3 程度をとる.  $\Delta_L$  はフィルター幅である.  $k$  は SGS 運動エネルギーで, 以下の偏微分方程式 [13] に従う.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_0 + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} - \underbrace{\sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{生産項}} - \underbrace{\frac{C_\varepsilon}{\Delta_L} k^{\frac{3}{2}}}_{\text{散逸項}} \end{aligned} \quad (46)$$

ただし  $C_\varepsilon$  はパラメータ定数で 0.5 程度をとり,  $\tau_{ij}$  は SGS 応力で,

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (47)$$

で求められる. このとき  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタであり,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (48)$$

である. 非圧縮性流体においては, 式 (46) の生産項は以下のようにも書ける.

$$-\sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \nu_t \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (49)$$

本研究では非圧縮性流体を扱うため,  $k$  の支配方程

式を,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_0 + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \nu_t \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{C_\varepsilon}{\Delta_L} k^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (50)$$

とし、これを解くことによって得られた  $k$  を式 (45) に代入することにより渦粘性を求める。また、初めのタイムステップから生産項に  $\nu_t$  を用いると、 $k$  が生産されなくなるため、本研究では 1000 ステップまでは  $\nu_0 + \nu_t$  を用いることによって  $k$  を発生させる。ここで式 (50) を LBM 的に解こうとすると、 $k$  および  $k$  の支配方程式を分布関数を用いて表現しなければならないが、 $k$  の分布関数表現は一般的に困難である。そこで本研究では、 $k$  を分布関数で表現することは行わず、式 (50) を有限差分法で解く。

このように、LBM に乱流モデル等を取り入れる際に分布関数で表現する必要があると思われるが、そうではなく、有限差分法などの他の解析手法と共に LBM を扱うことも可能である。

### (3) LES-MRT-LBM アルゴリズム

以下の図 2 に LES を適用した LBM のアルゴリズムをまとめる。MRT を採用している。

## 5. 数値計算結果

ここでは、本論文の主題であるスマゴリンスキーモデル型 LES を適用した LBM、1 方程式 SGS モデル型 LES を適用した LBM の数値計算を行い、結果を比較検討する。対象とする流れは 3 次元バックステップ乱流である。

### (1) 計算概要

図 3 の赤い線は固体壁であり、bounce-back B.C. を適用する。スパン方向 (D で切り抜く) には、periodic B.C. を適用する。左右は流入・流出の仮想境界であり、流入では velocity B.C. で一様流を流入、流出では速度勾配が 0 の条件を用いる。またステップでの拡大比  $ER$  とレイノルズ数  $Re$  について以下で定義する。

$$ER = \frac{H_{in} + H}{H_{in}} \quad (51)$$

$$Re = \frac{U_0 H}{\nu_0} \quad (52)$$

$U_0$  は流入部主流速度、 $H$  はステップ高さである。

バックステップ乱流では、上記の拡大比とレイノルズ数が計算パラメータとなり、ステップの手前までチャネル流のように流れは壁に沿うが、ステップのと

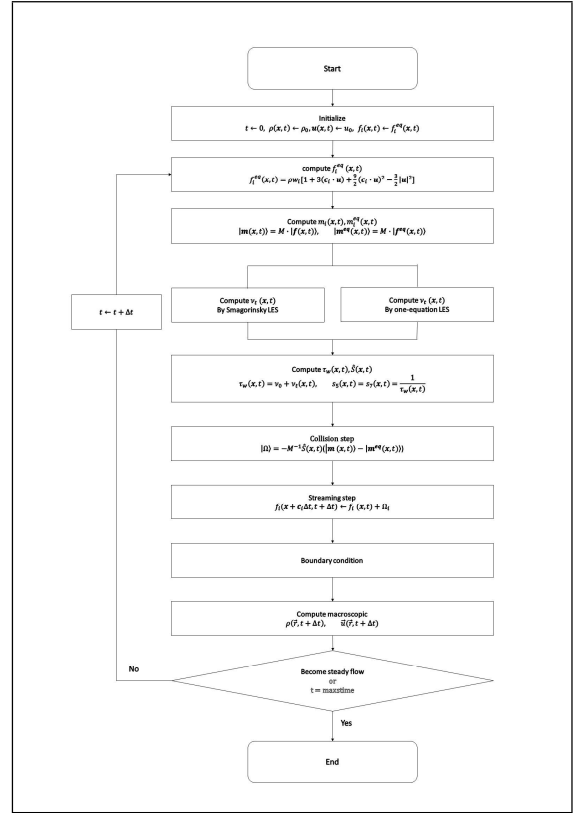


図 2: Flowchart of LES-MRT-LBM algorithm

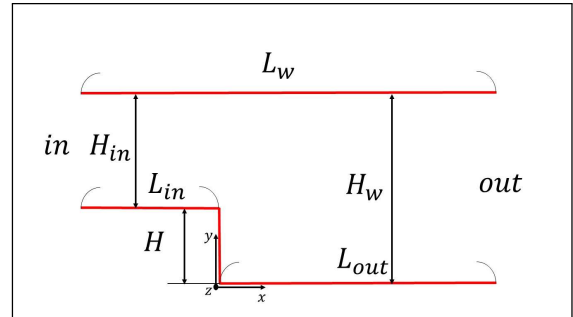


図 3: 3D backstep flow.

ころで流れが壁から離れ（剥離），ある距離進んだところで再び流れが壁に沿って流れるようになる（再付着）という現象が起きる。その剥離・再付着距離は上記のパラメータによって決定付かれ、計算の正確性の確認に用いられる。

### (2) 計算結果

本研究では以下の条件で計算を行う。

$$\begin{cases} H = 1.0, & H_{in} = 2.0, & (H_w = 3.0) \\ L_{in} = 10.0, & L_{out} = 15.0, & (L_w = 25.0) \\ D = 2.0, & u_{in} = 4.5 \times 10^{-2}, & \nu_0 = 1.0 \times 10^{-5} \\ C_k = 0.3, & C_\varepsilon = 0.5, & C_s = 0.2 \end{cases}$$

初期条件としては初期速度 0.0, 初期密度 1.0 を用いる。このとき,  $ER = 1.5$ ,  $Re = 5500$  で, 分割数は  $502 \times 61 \times 41$  をとる。また, 流入部長さ  $L_{in}$  は一様速度  $u_{in}$  を流入させチャンネル内で十分に発達した乱流がステップに流入する距離を取る。

結果に用いる  $x$  方向平均速度  $u_x$  は,  $50T_0$  ( $T_0$  はターンオーバー時間で  $T_0 = H/u_{in} = 20$ ) を準備期間とした後に,  $150T_0$  で時間平均をとり, またスパン方向 ( $z$ ) に関する空間平均もとる [1]。再付着距離は, ステップから, 近傍で  $u_x$  が正になる, チャンネル底面までの距離とする [1]。

SGS モデルのフィルター幅  $\Delta_L$  はスマゴリンスキーモデル, 1 方程式 SGS モデル共に LBM の  $\Delta x$  を用いる。1 方程式 SGS モデルの時間刻み幅も LBM の  $\Delta t$  を用いる。

以下に結果を示す。使用した計算機の CPU は Intel Xeon Gold 6128 (3.4GHz) である。Table.2 では再付着距離を比較し, 表 3 では計算時間を比較する。図 4 では 1 方程式 SGS モデルでの  $x$  方向平均速度分布を図示し, 図 5 ではスマゴリンスキーモデルでの  $x$  方向平均速度分布を図示する。図 6 では 1 方程式 SGS モデルでの流線図, 図 7 ではスマゴリンスキーモデルでの流線図を示す。

表 2: Comparison of reattachment length.

Research method	Reattachment length
One-equation SGS model	$7.5H$
Smagorinsky model	$6.3H$
Experiment by Itoh and Kasagi[14]	$7.0 \pm 0.5H$
Prediction by Adams and Johnston[15]	$6 \sim 8H$

表 3: Comparison of calculation time.

Research method	Calculation time (h)
One-equation SGS model	46.8
Smagorinsky model	52.3

以上の結果より, スマゴリンスキーモデル型 LES を適用した LBM より, 1 方程式 SGS モデル型 LES を適用した LBM が精度が高い。また, 計算時間も短くなるが, それはスマゴリンスキーモデルで b) の式 (43) の  $Q_{jk}$  の計算に時間がかかっていると考えられる。

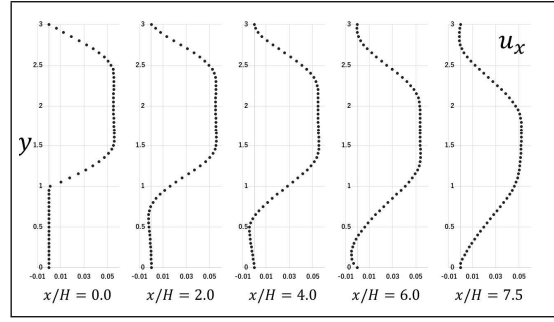


図 4: Profiles of mean streamwise velocity (one-equation SGS model).

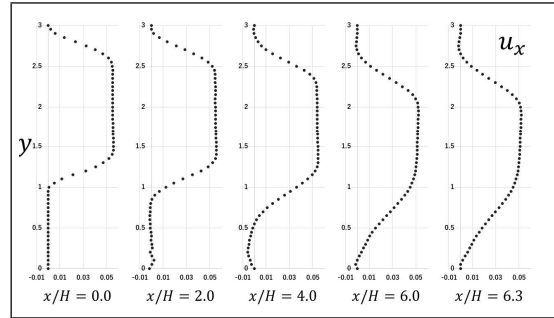


図 5: Profiles of mean streamwise velocity (Smagorinsky model).

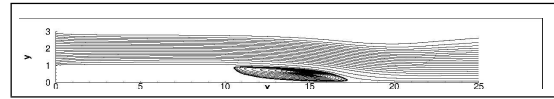


図 6: Figure of streamline (one-equation SGS model).

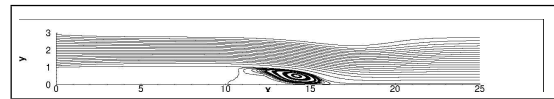


図 7: Figure of streamline (Smagorinsky model).

## 6. 結論

乱流シミュレーションにおいて LBM に LES を適用する際の SGS のモデル化について, SGS 運動エネルギー  $k$  に対する支配方程式を有限差分法で解くことにより, 1 方程式 SGS モデルを用いる方法を提案した。バックステップ形状の乱流で検証を行ったが, スマゴリンスキーモデル型 LES より 1 方程式 SGS モデル型 LES の方が精度が優れた結果が得られた。また, 計算時間においても短くなった。これにより, 1 方程式 SGS モデル型 LES を使用した LBM の乱流解析の



有用性が確認できた。また、LBM に乱流モデル等のモデルを取り入れる際に分布関数で表現する必要があると思われるが、そうではなく、差分法などの他の解析手法と共に LBM を扱うことも可能であると示せた。

今後の課題として、壁条件が挙げられる。それは、乱流の数値解析においては、壁近傍において急激な速度変化が現れるため、壁近傍において解像度を上げるか、壁条件を適用しモデル化を行うことが一般的である。しかし LBM において、それを達成することは一般的に困難である。したがって、本研究においてもそれらを達成できておらず、壁近傍の精度に課題が残っている。

また、SGS モデルそれぞれの計算パラメータについても、最適であるものを発見できたと断言はできない。そのパラメータの探索についても課題が残る。

## 参考文献

- [1] Nor azwadi C. Sidik, Javad Ghaderian, and Sakineh Sadeghipour. Simulation of turbulent flow over a backward facing step using lattice boltzmann method. *Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 8, No. 6, pp. 670–782, 2013.
- [2] Muhammad Izham, Tomohiro Fukui, and Koji Morinishi. Simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence using the moment-based lattice boltzmann method and les-lattice boltzmann method. *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol. 9, No. 4, pp. JFST0064–JFST0064, 2014.
- [3] 韓夢濤, 大岡龍三, 菊本英紀, 中島慶悟. 室内等温流れの les における格子ボルツマン法と有限体積法の比較. 第 31 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. D06–3, 2017.
- [4] 小山省司. 新しい 1 方程式型サブグリッドスケールモデルの提案. 生産研究, Vol. 63, No. 1, pp. 81–85, 2011.
- [5] Kazuhiko Suga, Yoshiaki Kuwata, K. Takashima, and R. Chikasue. A d3q27 multiple-relaxation-time lattice boltzmann method for turbulent flows. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 69, No. 6, pp. 518–529, 2015.
- [6] Yoshiaki Kuwata and K Suga. Anomaly of the lattice boltzmann methods in three-dimensional cylindrical flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 280, pp. 563–569, 2015.
- [7] 薦原道久. 格子ボルツマン法の基礎と応用. 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 77, No. 784, pp. 2367–2378, 2011.
- [8] Dominique d’Humières. Multiple-relaxation-time lattice boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 360, No. 1792, pp. 437–451, 2002.
- [9] Guy R McNamara and Gianluigi Zanetti. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical review letters*, Vol. 61, No. 20, p. 2332, 1988.
- [10] François Dubois and Pierre Lallemand. Quartic parameters for acoustic applications of lattice boltzmann scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 12, pp. 3404–3416, 2011.
- [11] Pierre Lallemand and Li-Shi Luo. Theory of the lattice boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, Vol. 61, No. 6, p. 6546, 2000.
- [12] Yu-Hong Dong and Pierre Sagaut. A study of time correlations in lattice boltzmann-based large-eddy simulation of isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, Vol. 20, No. 3, p. 035105, 2008.
- [13] Javed Taghinia and Md Mizanur Rahman. Large eddy simulation of round impinging jet with one-equation subgrid scale model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 116, pp. 1250–1259, 2018.
- [14] 笠木 伸英伊藤 信明. 三次元画像処理流速計によるバックステップ後方剥離再付着乱流の計測. 流れの可視化, Vol. 9, No. 34, pp. 245–248, 1989.
- [15] EW Adams and JP Johnston. Effects of the separating shear layer on the reattachment flow structure part 2: Reattachment length and wall shear stress. *Experiments in Fluids*, Vol. 6, No. 7, pp. 493–499, 1988.